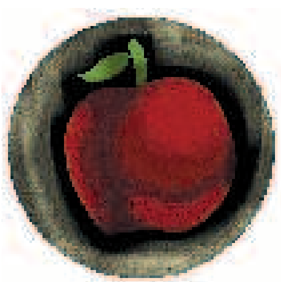
# A un siglo de la conjetura de Poincaré



En matemáticas las cosas no siempre son lo que parecen, especialmente si se habla de nudos, donas, esferas y objetos de una, dos, tres o más dimensiones. La conjetura de Poincaré constituye un paso necesario para entender la dimensión 3.

**Juan Antonio Pérez**

*Las cosas son exactamente lo que parecen, ni más, ni menos…*

Jean-Paul Sartre

Las cosas son lo que parecen: posiblemente cierto pero no evidente. El intelectual mexicano Jesús Reyes Heroles dijo alguna vez, refiriéndose al contexto político, que "la forma es fondo"; alguien más expresó que "lo que parece es". En contradicción por lo menos aparente, hay un viejo refrán que reza: "las apariencias engañan". Este último suele usarse como medida precautoria en ciencia, y en particular en matemáticas: es de fundamental importancia no obtener conclusiones a partir de la primera impresión.

## SI ESTÁ PELOTA, ES PELOTA

En 1904, el matemático, físico y filósofo Henri Poincaré (1854-1912) hizo pública una conjetura poco usual relacionada con un instrumento de clasificación creado por él mismo. El tema de la conjetura es la esfera, de manera que vale la pena dejar claro lo que entenderemos por esfera antes de enunciar la conjetura. Definiremos la esfera de dimensión 1, el círculo, como *una recta a la que se le agrega un punto en el infinito*. Informalmente, la 1-esfera puede pensarse entonces como un aro, y podemos tomar una pelota como la imagen mental de la esfera de dimensión 2, o 2-esfera.

Proyectemos los puntos de un círculo sobre una recta como se muestra en la figura 2. El punto $A$ se proyecta sobre el punto $B$ y el punto $P$ va a parar al punto $Q$ de la recta. El foco de proyección es el "polo norte" del círculo: el punto $N$. Mediante este procedimiento conocido como proyección estereográfica identificamos los puntos de la recta con el círculo sin su "polo norte". El punto $N$, entonces, se identifica con el punto en el infinito que agregamos a la recta.

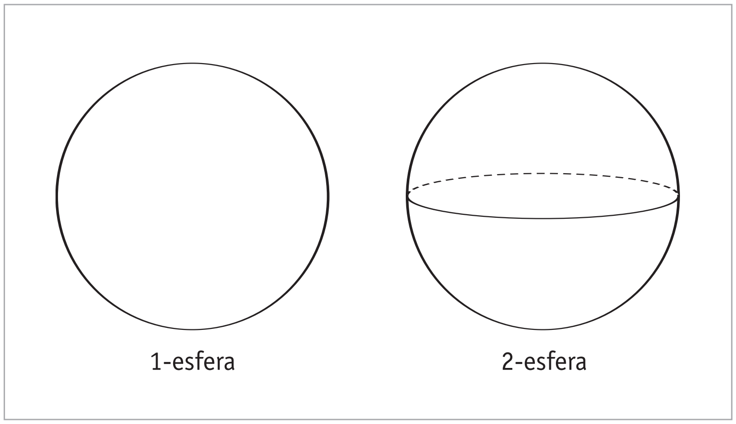



Figura 1.

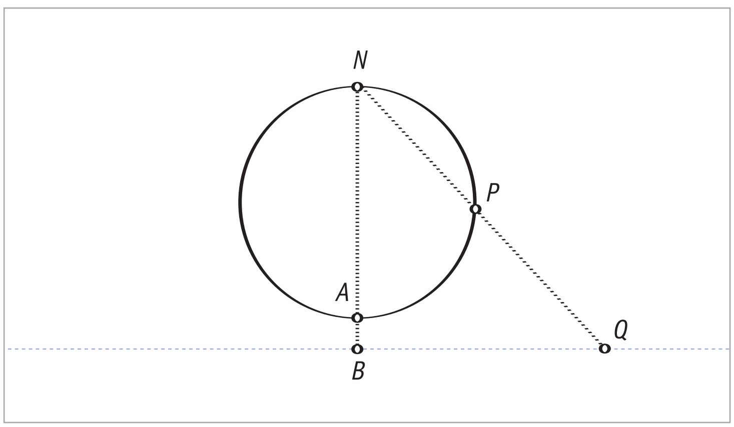



Figura 2.

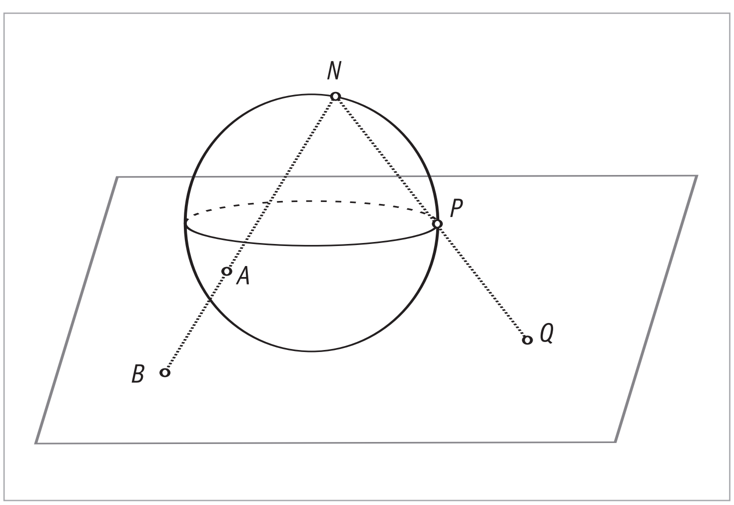



Figura 3.

Apelando de nuevo a la proyección estereográfica, identificamos cada punto del plano con un punto de la 2-esfera, exceptuando su "polo norte". La 2-esfera sería, así, *un plano al que se le agrega un punto en el infinito*. Nuevamente el punto $N$ hace las veces de punto en el infinito. Véase la figura 3.

El espacio tridimensional es nuestro espacio ambiente, y por analogía con los casos anteriores, la esfera de dimensión 3 puede concebirse como nuestro espacio ambiente habitual más un punto en el infinito. La 1-esfera puede visualizarse como "encajada" en el plano, y la 2-esfera en el espacio tridimensional. La 3-esfera puede encajarse en el espacio de 4 dimensiones, pero ser animales tridimensionales nos impide observar el fenómeno con los sentidos.

El matemático, físico y filósofo Henri Poincaré (1854-1912) hizo pública una conjetura poco usual relacionada con un instrumento de clasificación creado por él mismo. El tema de la conjetura es la esfera

En la rama de las matemáticas llamada *topología*, todas las esferas de la misma dimensión son indistinguibles, y además, por extraño que parezca, la forma no es esencial. La propiedad más básica de un círculo topológico no es la redondez, o dicho técnicamente la curvatura. Un círculo topológico es simplemente una curva cerrada que no tiene auto-intersecciones; en este sentido, los objetos que se muestran en la figura 4 son círculos topológicos en el plano.

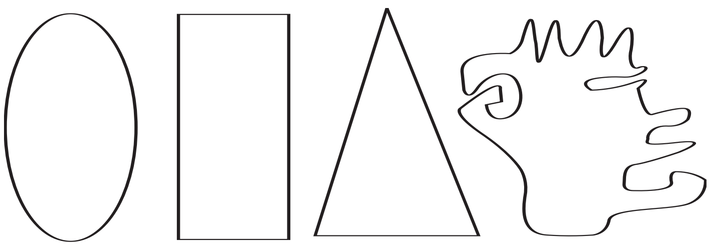


**Figura 4.**

La figura 5 muestra dos círculos topológicos que habitan en el espacio tridimensional; son lo que llamamos nudos. La única curva cerrada y simple en el plano es la curva de Jordan, o dicho topológicamente, el círculo. Por el contrario, en dimensión 3 hay una gran cantidad de curvas cerradas simples, las que conocemos como nudos.

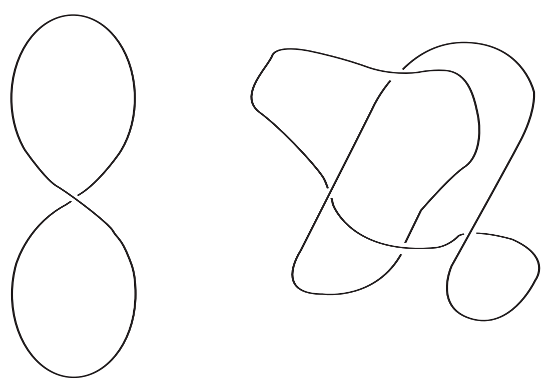


**Figura 5.**

La primera de estas dos figuras es un nudo trivial, es decir, puede desanudarse sin romperse. Parece una figura 8, pero no lo es porque no se intersecta a sí misma. Los objetos anteriores tienen en común la propiedad de tener un único "agujero" en el medio; la figura 8, por el contrario, tiene 2 "orificios" y no es por tanto un círculo topológico, no es pues una esfera de dimensión 1. El concepto de 2-esfera es igualmente elástico, a nivel topológico por supuesto. Los objetos que aparecen el la figura 6 representan las distintas 2-esferas topológicas.

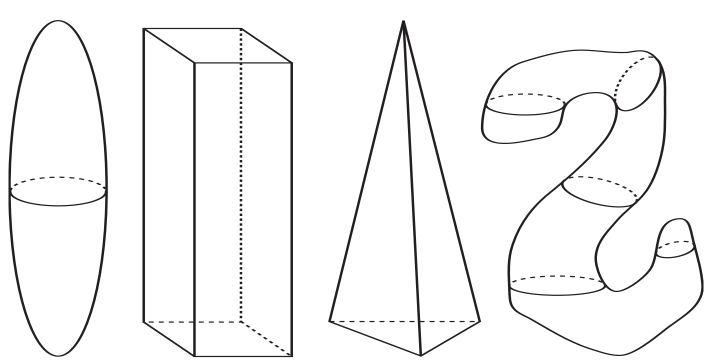


**Figura 6.**

Un círculo puede caracterizarse como una curva cerrada sin auto-intersecciones. Una 2-esfera es una superficie cerrada sin auto-intersecciones, aunque esta propiedad no la caracteriza, ya que superficies como el toro son cerradas y carecen de auto-intersecciones. Ser cerrado y no tener auto-intersecciones es una propiedad que comparten todas las esferas de todas las dimensiones.

La *homología*, que así se llama el instrumento algebraico ideado por Poincaré para clasificar espacios, se basa en lo que podemos llamar *triangulación*, en analogía con el caso de dimensión 2.

Revisemos algunos ejemplos: el tetraedro constituye una triangulación de la 2-esfera, y agregando algunas aristas obtenemos otra triangulación de la 2-esfera. Tenemos en figura 7 tres triangulaciones distintas de la esfera de dimensión 2.

Si usted, caro lector, se toma la molestia de contar los vértices, las aristas y las caras de las anteriores triangulaciones observará que la suma alternada

(vértices) - (aristas) + (caras)

es invariablemente igual a 2. Técnicamente decimos que la *característica de Euler* de la 2-esfera es 2, y constituye, por decirlo de alguna manera, una especie de "resumen" de su homología (Pérez, 2002, págs. 127-132). En dimensiones superiores la homología de los espacios topológicos se obtiene usando una analogía natural de la triangulación.

Poincaré creyó inicialmente que la homología caracterizaba completamente los espacios topológicos, lo que hubiese resultado muy conveniente, puesto que mediante manipulaciones algebraicas sería posible obtener conclusiones topológicas, o si el lector prefiere, geométricas. Con la preocupación de no obtener conclusiones apresuradas, Poincaré decidió probar con los espacios más sencillos posibles: las esferas.

Como el lector puede imaginarse con facilidad, la estructura de una esfera topológica puede no tener en absoluto la apariencia de una esfera, con lo que se dificulta su identificación. La triangulación permite, contando caras de distintas dimensiones, identificar los espacios de forma relativamente simple. El aserto original de Poincaré afirma que cualquier objeto cerrado ("cerrado" se usa como sinónimo de compacto y sin frontera; ser compacto puede pensarse como ser limitado, una 1-esfera es compacta pero una parábola no lo es. La 1-esfera es la frontera de un 2-disco, pero la 1-esfera misma no tiene frontera) que tenga la homología de la esfera *es* la esfera (topológicamente hablando, por supuesto). Poincaré mismo demostró la validez de su afirmación en dimensiones 1 y 2; sin embargo, a finales de 1904, nuevamente el propio Poincaré encontró un espacio de dimensión 3 que teniendo la homología de la esfera no era la esfera. El ejemplo se hizo rápidamente famoso como la "esfera salvaje".

Poincaré se vio entonces obligado a modificar su afirmación primera, incluyendo una propiedad que también él mismo había introducido en 1895: ser simplemente conexo (la conexidad simple se mide con un invariante conocido como grupo fundamental; Pérez, 2002, págs. 133-136, y Pérez, 2001, págs. 92-95). Un lazo en un espacio es una curva cerrada, aunque no necesariamente simple. El estudio de los lazos nos permite medir las posibilidades de contracción de un objeto en dimensión 1: si todos los lazos se pueden deformar continuamente hasta un punto, se dice

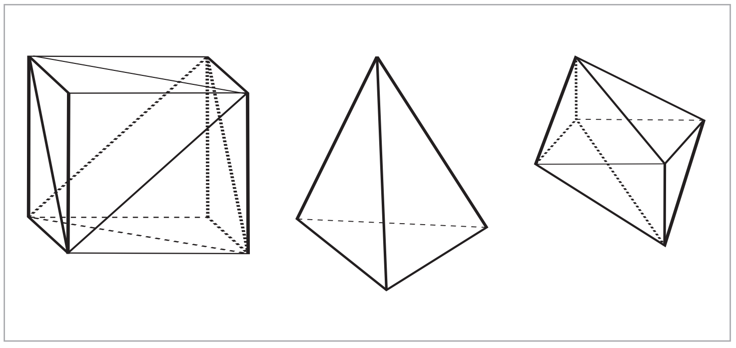


**Figura 7.**

Con la preocupación de no obtener conclusiones apresuradas, Poincaré decidió probar con los espacios más sencillos posibles: las esferas

A nivel topológico, una pelota puede no parecerlo, y viceversa: no todo lo que parece pelota lo es. Ser pelota es una propiedad intrínseca, mientras que estar pelota es un asunto circunstancial, digamos, de apariencia. En lenguaje común, la conjetura de Poincaré afirma que si se está pelota, necesariamente se es pelota

que el objeto en cuestión es simplemente conexo. Un cilindro, por ejemplo, tiene un orificio en el medio que impide contraer los lazos; el cilindro entonces no es simplemente conexo. En un toro encontramos lazos que rodean agujeros, como se muestra en la figura 12; luego ser simplemente conexo no es una propiedad del toro.

Poincaré ya había demostrado que las esferas de dimensión 2 o más de 2 eran simplemente conexas. Ilustremos el hecho: si intentamos lazar una pelota, lo más probable es que la cuerda resbale y se reduzca a un punto. Técnicamente decimos que todos los lazos en la 2-esfera son triviales. La "esfera salvaje" de Poincaré tenía la misma homología de la esfera, pero no todos sus lazos podían contraerse hasta un punto. La clave parecía residir en esta propiedad, y entonces la conjetura modificada quedó como sigue: Un objeto cerrado y simplemente conexo que tenga la homología de la esfera *es* la esfera.

A partir de 1904 esta afirmación fue conocida como la conjetura de Poincaré, y el hecho de que se satisface para objetos de dimensión 5 o mayor fue demostrado a principios de los años sesenta por Stephen Smale; no fue sino hasta 1982 que Michael Freedman hizo lo propio para objetos de dimensión 4. Un objeto cerrado que tenga la homotopía de la esfera *es* la esfera.

Como se observa, en estos dos casos fue necesaria una hipótesis adicional: la *homotopía*. Esta propiedad mide las características de contracción de un objeto en dimensiones superiores, de forma análoga que el hecho de ser simplemente conexo lo mide en dimensión 1. La afirmación en dimensión 3 ha resultado tener más complicaciones.

Como hemos visto, a nivel topológico, una pelota puede no parecerlo, y viceversa: no todo lo que parece pelota lo es. Si resulta admisible la analogía en dimensión 3, y pudiésemos pensar en pelotas tridimensionales, uno puede explotar la diferencia gramatical castellana entre ser y estar. *Ser* pelota es una propiedad intrínseca, mientras que *estar* pelota es un asunto circunstancial, digamos, de apariencia. En lenguaje común, la conjetura de Poincaré afirma que si se *está* pelota, necesariamente se *es* pelota.

## ¡HÁGANSE LOS NUDOS!

La conjetura de Poincaré y sus consecuencias nos hacen reflexionar acerca de que la naturaleza tomó una decisión sensata al fabricarnos de dimensión 3. Y por el hecho mismo de que nos desenvolvemos en un espacio de tres dimensiones, la dimensión 3 merece nuestra atención, y sus características son tales que dimensiones superiores han sido estudiadas y entendidas mucho antes que la nuestra. A mediados del siglo XX los profesionales de la matemática se percataron de que un sello distintivo de la dimensión 3 son los nudos: sólo hay nudos en dimensión 3, y ése es uno de nuestros privilegios.

Entender los nudos llevará necesariamente a entender la esfera de dimensión 3, y de ahí el interés de los matemáticos. Basado en los nudos, el matemático norteamericano James Waddel Alexander (1888-1971) demostró que, juntos, la homología y el hecho de ser simplemente conexo no son suficientes para caracterizar los objetos tridimensionales y, por supuesto, en particular, la esfera de dimensión 3. En ese sentido, la conjetura de Poincaré es falsa en la forma en la que se le conoce comúnmente. No obstante, en los inicios del siglo XXI, más de un siglo después de que fuera formulada la primera de las conjeturas de Poincaré, parece que hay elementos suficientes para caracterizar las esferas, lo que será un gran paso en la comprensión del mundo que nos rodea.

La dimensión 3 es ciertamente muy peculiar. Vivir en dimensión 3 es algo realmente ventajoso, y de ello no nos hemos percatado posiblemente por la costumbre de habitar en ella. En menos de tres dimensiones la vida es insípida, ofrece pocas posibilidades. Nuestras vidas en un plano, como podemos ver después de un pequeño esfuerzo de imaginación, serían francamente aburridas (Pérez, 2002, págs. 37-40).

Vivir en dimensión 3 es algo realmente ventajoso, y de ello no nos hemos percatado posiblemente por la costumbre de habitar en ella. En menos de tres dimensiones la vida es insípida, ofrece pocas posibilidades. Nuestras vidas en un plano, como podemos ver después de un pequeño esfuerzo de imaginación, serían francamente aburridas

No hay nudos que valgan la pena en un mundo de dimensión 2. Vaya, ni siquiera hay nudos posibles. En dimensión 4 y superiores las agujetas de los zapatos se desatarán de inmediato; tampoco entonces hay nudos que valgan la pena.

En dimensión 2, por ejemplo, una cuerda cerrada tiene sólo dos posibilidades: se auto-intersecta o no se auto-intersecta, y si no lo hace, entonces es lo que se conoce como una curva de Jordan; es decir, una curva cerrada simple. Si nuestra cuerda se auto-intersecta, entonces se dice que no es simple, y por supuesto no es un nudo. La figura 8 ilustra los dos casos considerados de curvas cerradas en el plano.

La primera es una curva cerrada no simple, y la de la derecha es una curva de Jordan. Un círculo topológico en el plano, o curva de Jordan, tiene la propiedad de dividir el plano en exactamente dos regiones: interior y exterior; las curvas que se auto-intersectan producen una cantidad mayor de fragmentos del plano. No hay nudos, pues, en el plano, pero además toda superficie vista suficientemente de cerca se comporta como un plano; una ilustración de ello es nuestro planeta, pues si bien es cierto que como sabemos es esférico, las mediciones en espacios pequeños son efectuadas como si se tratase de un plano. En síntesis, sobre una superficie no hay nudos.

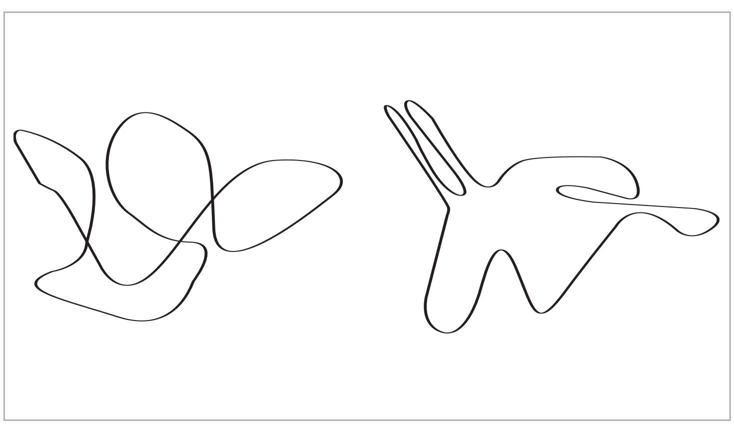


**Figura 8.**

En dimensión 4, por otra parte, los nudos son también imposibles; cualquier intento de anudamiento se desvanece recurriendo a la dimensión adicional. Consideremos un ejemplo: si tenemos en un plano un lazo que rodea una perforación del plano, la curva no podrá ser contraída dentro del plano hasta un punto; no obstante, si permitimos al lazo salir del plano durante el proceso de contracción, evitamos pasar por la perforación y contraeremos el lazo. De igual modo, si un nudo no puede desatarse en dimensión 3, podrá hacerlo si se le permite moverse por una dimensión adicional.

En dimensiones superiores a la tercera muchas de las posibilidades que tenemos desaparecen, lo que vuelve a dejarnos en el desamparo emotivo. En dimensión 3 tenemos nudos, poseemos la capacidad de anudar, y eso es una característica única y exclusiva de la tercera dimensión.

Las ventajas de la dimensión 3 son ahora evidentes: en otras dimensiones no podríamos usar zapatos con agujetas, no existirían las trenzas en las cabelleras femeninas, ni los moños para los regalos. En otras dimensiones, en contraparte, tampoco existirían instrumentos tan salvajes como la horca.

Estudiar nudos es entonces un instrumento indispensable para entender la tercera dimensión, el ámbito geométrico en el que gozamos y sufrimos nuestras respectivas existencias, y en el que transcurre nuestra historia.

La conjetura de Poincaré constituye, por lo antes argumentado, un paso necesario para entender la dimensión 3, y los nudos son algo que, como ya sabemos la distinguen de otras dimensiones. Los nudos y la conjetura nos revelarán mucho de lo que de nuestro Universo desconocemos; por ello, una respetable cantidad de matemáticos han buscado afanosamente una demostración de la conjetura de Poincaré mediante el uso de los nudos. No se ha producido hasta ahora tal demostración; sin embargo, el estudio de los nudos ha arrojado mucha luz acerca de nuestro universo, que tiene la suerte de poseer nudos.

## COSAS DE LA VIDA

En la presente sección trataremos de algunas curiosidades geométricas que distinguen espacios entre sí; en particular, nos ocuparemos de un resultado obtenido en 1929 por James Alexander en el camino hacia una demostración de la conjetura de Poincaré, que tiene que ver con un concepto conocido como *irreducibilidad*.

Una de las tareas importantes es buscar las características de la dimensión 3 que la hacen diferente de las otras dimensiones, y para ello conviene buscar todas las semejanzas posibles. Los espacios euclidianos no difieren mucho uno de otro, por lo que estos espacios deben ser estudiados a través de sus esferas, sobre las cuales hay mucho más control: las semejanzas y las diferencias se magnifican facilitando su estudio.

Si consideramos a la recta como una parte del plano, y al plano a su vez como una parte del espacio tridimensional, entonces podemos pensar en la 1-esfera como el "ecuador" de la 2-esfera.

Por analogía, la esfera de dimensión cero es el "ecuador" de la 1-esfera; es decir, dos puntos constituyen el "ecuador" de la circunferencia. En general, consideramos a la esfera de dimensión como el ecuador de la esfera de dimensión.

Un disco es el interior de una circunferencia. Con ánimo de generalizar, al igual que llamamos 1-esfera a la circunferencia, llamaremos 2-disco a su interior, puesto que es un objeto de dimensión 2. Procediendo nuevamente por analogía, un 1-disco es un segmento y tiene como frontera una 0-esfera: el objeto constituido por los dos puntos en sus extremos.

Un 3-disco tiene el aspecto de una pelota sólida y su frontera es una 2-esfera, es decir, una pelota hueca. Generalizando: la esfera de dimensión es la frontera del disco de dimensión. Con las nociones anteriores, entremos en contacto con un hecho matemático conocido: la 1-esfera divide a la 2-esfera en un par de 2-discos (figura 11).

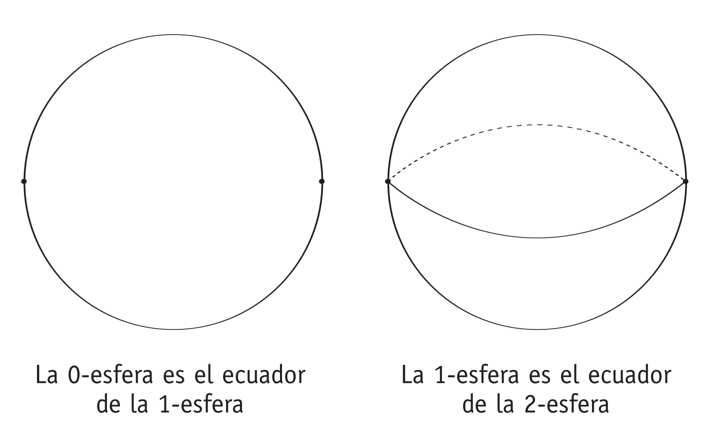



**Figura 9.**

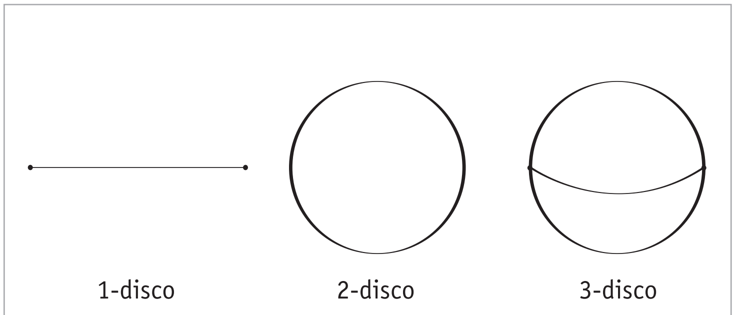



Figura 10.

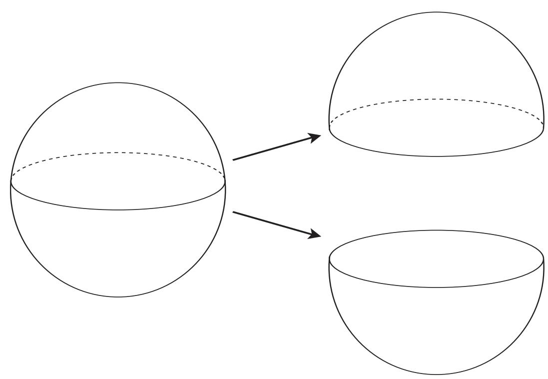


Figura 11.

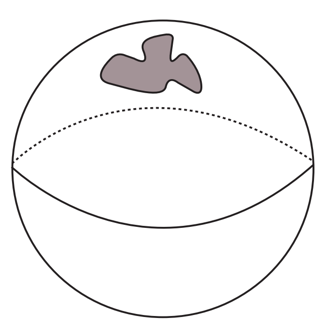


Figura 12.

Los hemisferios de la 2-esfera son discos "combados". Basta aplanarlos para obtener los discos. Esto no resulta sorprendente, pero el hecho de que cualquier curva cerrada simple, es decir, cualquier "círculo" sobre la 2-esfera produce el mismo fenómeno, es decir, divide la 2 esfera en un par de 2-discos, es ya un hecho notable. Esta propiedad se llama *irreducibilidad* (figura 12).

La región contenida dentro de la curva es, salvo deformación continua, un 2-disco, al igual que lo es la región exterior. Por supuesto no todas las superficies gozan de esta propiedad. En un 2-toro, por ejemplo, hay 1-esferas que son frontera de un 2-disco como el que se muestra en la figura 13.

Sin embargo, en la figura 14 se muestran dos 1-esferas en un 2-toro que no son frontera de un 2-disco en ningún caso.

En ambos casos, la 1-esfera bordea un cilindro, y verificarlo se considera un sano ejercicio de imaginación para el lector. No todas las superficies son entonces irreducibles como la esfera, pero aquellas que no lo son, después de alguna cirugía lo serán. El procedimiento es el siguiente, y lo ilustraremos con el toro. Como ya vimos, cortarlo por un círculo que no es la frontera de un disco nos produce un cilindro; ahora bien, si al cilindro le colocamos dos "conos" en los extremos, obtendremos una esfera. El proceso se ilustra en la figura 15.

Como se observa, luego de agregar los conos basta "inflar" la superficie obtenida para llegar a una 2-esfera, que como sabemos es irreducible. Ahora bien, el caso del toro es relativamente sencillo, pero puede demostrarse con cierta facilidad que basta con un número finito de pasos para obtener, a partir de una superficie compacta, una superficie irreducible. De hecho, la única superficie irreducible es la 2-esfera, y el teorema de clasificación de superficies orientables (Pérez, 2002, págs. 137-144) indica que toda superficie de éstas es una esfera con una cantidad finita de asas.

Estos hechos pueden parecer triviales tratándose de superficies y en particular de 2-esferas. No obstante, no es evidente que la 3-esfera, nuestro espacio ambiente, presente el mismo comportamiento. Sin embargo, ya en 1929, Alexander demostró que una 2-esfera divide a la 3-esfera en un par de 3-discos, es decir, que la 3-esfera es irreducible, y además, que al igual que para las superficies, los objetos de dimensión 3 que no son irreducibles, lo serán después de una cantidad finita de "cirugías esferoidales".

Como ejercicio para el lector proponemos intentar cirugía sobre un toro doble, es decir, sobre una 2-esfera con dos asas. Pasar después al caso de una cantidad finita de asas será rutinario, y usted habrá saboreado la gloria de obtener una demostración del análogo en dimensión 2 del teorema de Alexander, cuyo contenido se expresa en el párrafo anterior.

Después de todo, el concepto de irreducibilidad es un hecho geométrico, y sus consecuencias, siendo tridimensionales, son cosas de la vida.

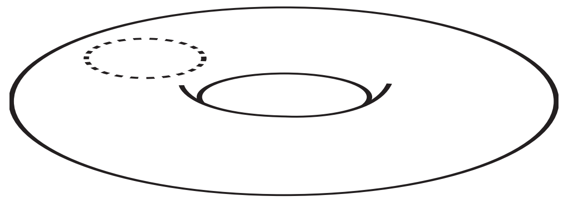


**Figura 13.**

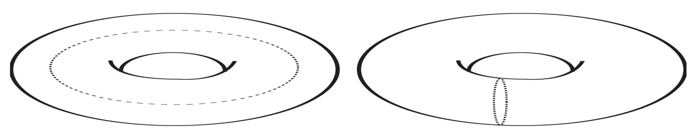


**Figura 14.**

## LA ÍNTIMA GEOMETRÍA DE LA MANZANA

La conjetura de Poincaré es uno de los secretos que aún nos reserva la naturaleza, aunque tal vez por poco tiempo, puesto que se produjeron durante 2003 varios anuncios que apuntan a que la humanidad contará en un futuro cercano con una demostración de su veracidad.

Dado que la conjetura de Poincaré unifica la clasificación de las esferas en todas las dimensiones, no sólo nos interesan las propiedades de la dimensión 3 que la distinguen de otras dimensiones; estamos también interesados en aquellas propiedades que la dimensión 3 comparte con otras. Comenzaremos, al igual que en el apartado anterior, con una analogía en dimensión 2.

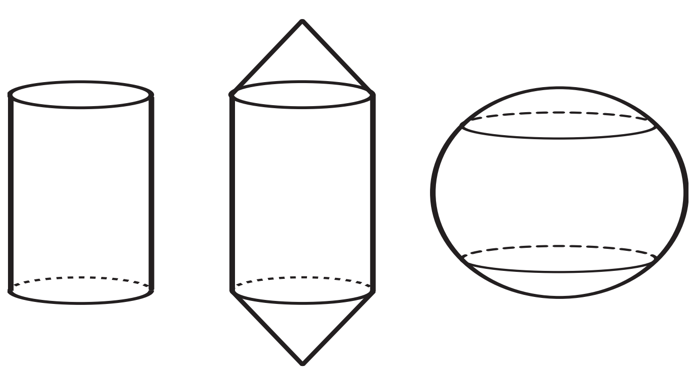


**Figura 15.**

Una de las propiedades interesantes de las superficies compactas es que puede fraccionar-

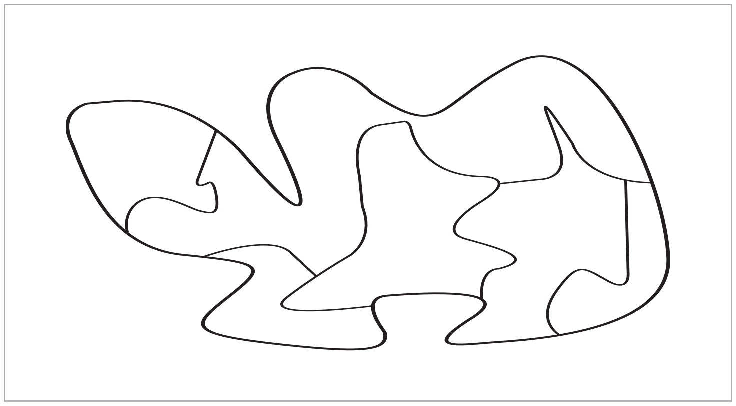


Figura 16.

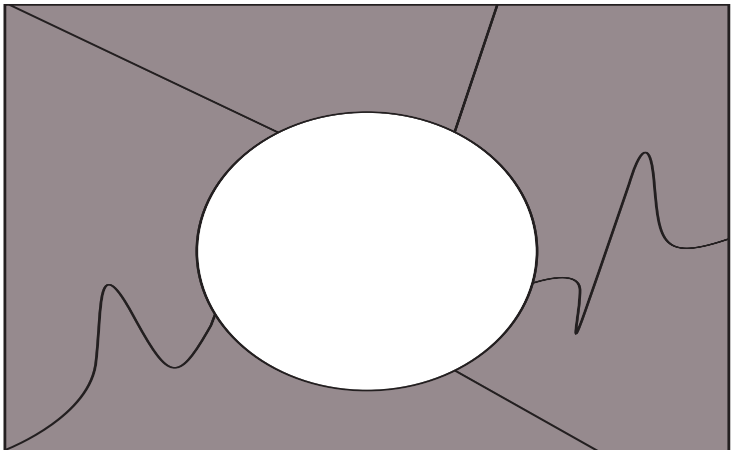


Figura 17.

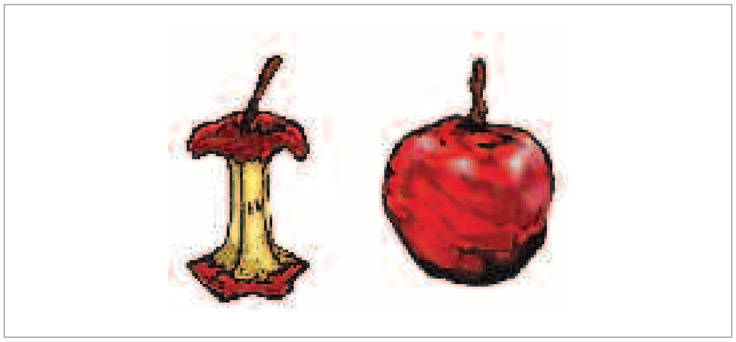


Figura 18.

se en porciones cuya frontera es una curva de Jordan, es decir, un círculo topológico. La distribución de un mapa es una buena ilustración; en ella, la frontera de cada país es una curva de Jordan, como se ilustra en la figura 16.

Ahora bien, incluso en caso de que la superficie tenga orificios, lagos por ejemplo, esta propiedad de las superficies compactas tiene aún lugar, como puede observarse en la Figura 17.

Para objetos de dimensión 3, una propiedad análoga a la anterior no es del todo evidente. En primer lugar, porque las fronteras posibles no son círculos, sino esferas y toros: las superficies compactas más elementales.

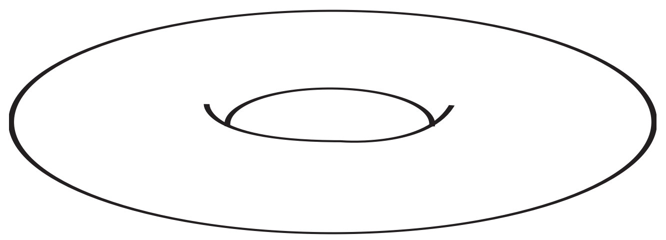
La conjetura de geometrización de Thurston afirma que todo objeto compacto de dimensión 3 puede descomponerse como la unión de objetos con estructura geométrica que tienen como frontera toros o 2-esferas. El hecho de que tenga estructura geométrica significa que en estos objetos tienen sentido las nociones de distancia y de curvatura.

Valdría la pena ilustrar la conjetura de Thurston descomponiendo un objeto de dimensión 3, como una manzana, la que salvo por la hoja, puede pensarse como un disco de dimensión 3 en lenguaje topológico. En realidad, la forma usual en la que nos comemos una manzana reproduce la conjetura de geometrización de Thurston.

La manzana originalmente tiene un aspecto que, salvo por las imperfecciones del dibujo se ve como la figura de la izquierda, y al final, después del suculento banquete, su aspecto es el que se ofrece a la derecha de la figura 18. Ahora bien, si pudiésemos reconstruir la parte de la manzana que usamos como alimento, su aspecto sería poco más o menos el de la figura 19: un toro sólido.

Pero eso no es todo: con algo de imaginación y otro poco de topología, podemos "inflar" los restos de la manzana hasta obtener una "manzana nueva", en cuya superficie, eso sí, se notaría la acción de nuestra dentadura.

Figura 19.



La ilustración anterior sirve básicamente para percatarnos de que la frontera de los residuos de la manzana es una esfera, al igual que la frontera de la manzana original. Pero además, dado que podemos descomponer la manzana como se ilustra, entonces hemos descompuesto la manzana que es un objeto tridimensional, en dos nuevos objetos cuyas fronteras son un toro y una esfera (figura 21).

La figura 21 muestra que la conjetura de Thurston se cumple para manzanas, o si usted prefiere, 3-discos. Un ejercicio provechoso para el lector y que recomendamos ampliamente es buscar descomposiciones distintas del 3-disco: puede descomponerse en dos 3-discos si partimos la manzana por la mitad; puede también descomponerse en dos toros sólidos entrelazados. Después de éstas, muchas otras descomposiciones se harán presentes en la imaginación de usted.

Pensemos además en las posibles descomposiciones de un toro sólido: la forma en la que se corta una rosca de reyes nos muestra una descomposición en dos 3-discos. Partir una dona por la mitad nos descompone un toro sólido en dos toros sólidos. Morder la dona produce una descomposición en un toro sólido y un 3-disco. Una dona rellena muestra una descomposición distinta… ¿puede usted identificarla?

No sabemos cómo llegó William Thurston a proponer su conjetura, pero si una manzana pudo haber estimulado al genio que propuso una teoría gravitatoria, no es descabellado que la conjetura de Thurston haya nacido del estudio de la íntima geometría de una manzana.

## EL FINAL SIEMPRE FELIZ

Demostrar la validez de la conjetura de Thurston en general es un trabajo que aún está pendiente, aunque de ser correcto lo afirmado por Grigori Perelman, matemático ruso, el aserto de Thurston habrá sido demostrado y con ello también la más famosa conjetura de Poincaré.

Figura 20.

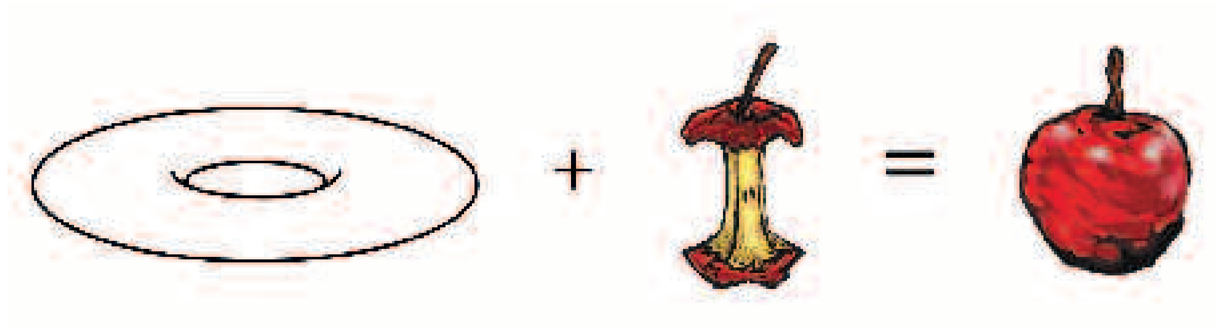


**Figura 21.**

En su trabajo, Perelman usa técnicas inesperadas y altamente ingeniosas para demostrar la conjetura de Thurston. En términos generales, Perelman echa mano del concepto de curvatura y usa una transformación continua llamada flujo de Ricci para obtener redondez, es decir, curvatura constante y positiva en una variedad tridimensional irreducible, simplemente conexa y con la homología de la esfera.

Grisha, como se hace llamar, es un matemático lleno de peculiaridades: es suficientemente joven como para ser un serio aspirante a la medalla Fields y es conocido entre sus colegas por llevar un comportamiento poco ortodoxo. Sus trabajos se encuentran todavía en evaluación por la comunidad matemática luego de su aparición en 2004, año que representó una oportunidad inmejorable para que los trabajos de Perelman fuesen sancionados positivamente, justo a cien años de que la conjetura fuese formulada.

Además de la medalla Fields, el Instituto Clay ha ofrecido una recompensa de un millón de dólares a quien proporcione una solución a uno de los siete llamados "problemas del milenio", uno de los cuales es justamente la conjetura de Poincaré. Es posible que Perelman se haga acreedor a la recompensa del Instituto Clay, y también es probable que se rehúse a aceptarla, pues ya se ha dado el caso de que rechace un premio en metálico que le fuera ofrecido por una sociedad europea.

Tres artículos de Perelman cuyo objetivo es la demostración de la conjetura de Poincaré pueden ser encontrados en internet, en el portal que se consigna en las referencias. El cuarto, el cual contendría la cereza del pastel no ha aparecido al terminar la redacción del presente artículo y los tres primeros no han superado la etapa de arbitraje. Esperemos: es posible que se demuestre la conjetura de Poincaré aunque tal hecho ya no servirá para celebrar su centésimo aniversario.

## Para saber más:

Anderson, M. T. (2004), "Geometrization of 3-manifolds via the Ricci Flow", *Notices of the American Mathematical Society*, Rode Island, vol. 51, núm. 2, 184-193.

Fort, M. K. (1962), *Topology of 3-manifolds and related topics*, New Jersey, Prentice Hall.

Milnor, J. (2003), "Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds", *Notices of the American Mathematical Society*, Rode Island, vol. 50, núm. 10, 1226-1233.

Perelman, Gregory, artículos disponibles en *http://arXiv.org/find/math/1/au:+Perelman_G/*

Pérez, J. A. (2001), *La herencia matemática del siglo XX*, Conaculta/IZC, México.

Pérez, J. A. (2002), *Galería matemática*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Singer, E. (2004), "The reluctant celebrity", *Nature*, vol. 47, 29 enero, págs. 388-389.

**Juan Antonio Pérez** es doctor en matemáticas con especialidad en topología equivariante. Realiza investigación acerca de modelos algebraicos para el cálculo de cohomologías de Borel. Es investigador en la Unidad Académica de Estudios Nucleares de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Ha publicado dos libros de divulgación: *Galería matemática* y *La herencia matemática del siglo XX*.
japerez@cantera.reduaz.mx