



# De las **formas** de la **naturaleza** a las **matemáticas**

Jorge Antonio Castillo Medina, Faustino Sánchez Garduño y  
Pablo Padilla Longoria



Uno de los grandes retos de la biología evolutiva y del desarrollo es entender cómo surgen las formas y estructuras funcionales en los seres vivos. En 1952, Alan Turing propuso un mecanismo que permite explicar la formación de patrones en sistemas químicos y biológicos. En este artículo describimos dicho enfoque, desde su formulación hasta desarrollos recientes. Después de 60 años, esta propuesta ha cobrado gran actualidad gracias a la posibilidad de estudiarla en sistemas biológicos concretos y por la forma en que puede integrarse de manera natural a la biología evolutiva y del desarrollo. En particular, el estudio de redes de regulación genética y el papel que éstas juegan en la emergencia de las formas y la funcionalidad en los seres vivos puede vincularse con mecanismos físicos concretos, que permiten comenzar a entender la relación entre la información genética y la morfología de un organismo.

## **Forma, función y crecimiento en los seres vivos**

**E**n el libro *Sólo cuentos*, de Rudyard Kipling, se encuentra la historia “Cómo obtuvo el leopardo sus manchas”. Según ésta, el felino originalmente era del color de la arena, lo mismo que su amigo etíope, lo cual les permitía cazar a los otros animales cuando vivían en la pradera. Como la cebra, el antílope y la jirafa se mudaron al bosque y adquirieron cada uno sus respectivos atuendos, se confundían con los troncos y las sombras de los árboles y era difícil cazarlos, mientras que el humano y el leopardo eran claramente visibles. Por consejo del sabio mandril, los dos deciden también cambiar su apariencia: el hombre toma un color negro y, finalmente, convence al leopardo que se deje pintar unas manchas con la pintura que le ha sobrado; y así fue como el leopardo adquirió las manchas de su pelambre.

La historia sugiere preguntas aparentemente sencillas, pero que no tienen respuestas fáciles: ¿cómo y por qué surgen estructuras biológicas que tienen cierto



orden espacial? ¿Es posible entender la gran complejidad de las formas y estructuras en los seres vivos? ¿Qué mecanismos hacen posible que surjan estructuras espacialmente ordenadas en la naturaleza?

La embriología estudia el desarrollo del embrión, desde la fertilización hasta el nacimiento. La morfogénesis se ocupa del origen de las formas y patrones en la naturaleza. En el contexto de la embriología es central la pregunta de cómo se origina a partir de una sola célula el cigoto, la gran variedad de estructuras, tipos celulares y la enorme diversidad de posibles funciones que desempeñan los organismos. Y no sólo tiene un interés teórico, sino que en la práctica está relacionada con el estudio de las células madre y la posible regeneración de tejidos u órganos, y de enfermedades como el cáncer.

Para individuos que se originan de la fecundación de un óvulo por un espermatozoide, la división del huevo en dos, cuatro, ocho y más células da lugar a un arreglo esférico de éstas, todas aparentemente idénticas: la *mórula*. En algún momento, las células de la *mórula* dejan de ser todas iguales. Estudios recientes hacen ver que este cambio de identidad ocurre en etapas muy tempranas, casi desde las primeras divisiones, pero que los cambios no son aparentes, sino que se dan a nivel genético, es decir, debido a los genes que están “encendidos” o “apagados”, por decirlo de manera coloquial. Lo importante es que las células de la *mórula* han escogido ya sus posibles destinos. En otras palabras, aun en estados muy tempranos del desarrollo, alguna señalización determina si una célula de la *mórula* dará origen a células de la placenta o del embrión propiamente dicho.

Este cambio cualitativo se inicia cuando algunas de las células del interior de la *mórula* se desplazan a la periferia del huevo, dejando en el centro una cavidad llena de líquido. A este estado se le llama *blástula*. En etapas posteriores del desarrollo surge el individuo propiamente tal, es decir, con todas sus partes. Se trata de la *diferenciación celular*. Durante ésta, las células, aparentemente iguales, se especializan y forman parte de los órganos (ojos, hígado, manos, riñones, etcétera) y sistemas (nervioso, digestivo, respiratorio, etc.) del individuo, teniendo entonces funciones diferentes y específicas. El proceso de diferenciación celular está a la fecha lejos de ser entendido del todo.

El mecanismo de formación de patrones está controlado genéticamente. Pero, ¿cómo es que la información genética se traduce en forma y función? Aquí la contribución de Turing es muy significativa, pues permite relacionar la información genética con el contexto físicoquímico del desarrollo. Los modelos matemáticos juegan un papel esencial, pues el sólo poseer la información genética “en bruto”, es decir, la estructura del código, no es suficiente para entender los mecanismos del desarrollo y de la evolución. A partir de la secuenciación del genoma de varias especies, y en particular del ser humano, se pensó que se tendrían respuestas inmediatas a muchas preguntas fundamentales. La realidad ha mostrado ser más compleja: será imposible desentrañar las relaciones y los mecanismos de control básicos del desarrollo en los seres vivos sin usar herramientas matemáticas y computacionales de modelación.

El zoólogo escocés D’Arcy Wentworth Thompson, en su obra *On growth and form*, se adelanta a su tiempo al considerar que la emergencia de patrones espaciales en la naturaleza es resultado de un proceso de *autoorganización* cuyo origen son los procesos físicos propios de cada sistema. Su planteamiento no deja lugar a dudas: “Célula y tejido, concha y hueso, hoja y flor, también son materia y, obedeciendo las leyes de la física, sus partes se mueven, se moldean, se ajustan. No hay excepciones a la regla: Dios siempre hace geometría. Los problemas de cómo se genera la forma son, en primera instancia, problemas matemáticos; los de su crecimiento, problemas físicos.”

Aldama y colaboradores (2010) comentan: “Los epígrafes de cada uno de los doce capítulos de los que consta *Life’s other secret: the new mathematics of the living world* —una de las obras del matemático británico Ian Stewart—, son citas de *On growth and form*. El primer secreto, dice Stewart, fue develado por Watson y Crick al descubrir la estructura de la molécula del ADN; el otro es el que explica cómo emerge el orden, la estructura y la forma en todas las manifestaciones de la vida.”

## El mecanismo de Turing

Alan Turing, en su trabajo *The chemical basis of morphogenesis*, ubicándose en la postura de Thompson —autor a quien leyó en su infancia—, propone un meca-

nismo *morfogenético* que con el tiempo se convirtió en piedra angular en la modelación matemática de la emergencia de patrones en la naturaleza. Centra su atención en dos procesos básicos: la *reacción química* de sustancias (a las que llama *morfógenos*) y la *difusión* de éstas por el tejido. El mecanismo morfogenético de Turing se origina de un estado de concentración de los morfógenos que es estacionario (no cambia con el tiempo) y homogéneo (no varía en el espacio), y estable ante perturbaciones temporales, pero inestable ante perturbaciones espaciotemporales. Una vez que éste se dispara, habiendo transcurrido un tiempo “suficientemente grande”, culmina en la distribución espacial no homogénea de los morfógenos, que es “ordenada”: ¡éste es un patrón de Turing!

Con este enfoque se ha estudiado la emergencia de patrones en sistemas químicos, biológicos y físicos; por ejemplo, un sistema para describir los patrones de coloración en la concha de un molusco. En la Figura 1 se ven dos fotos: un molusco real (izquierda) y otro obtenido por medio de simulaciones numéricas de un sistema de Turing (derecha).

### ● Otro mecanismo morfogenético

Gran variedad de organismos se mueven en respuesta a diferentes estímulos ambientales (luz, sustancias químicas, etcétera) o por cuestiones de comportamiento (apareamiento, conductas gregarias). En caso de que, como resultado del movimiento de los individuos, éstos se agrupen, es frecuente que el conglomerado exhiba diversas geometrías, resultado de un *efecto cooperativo* en el que participan todos los miembros de la población.

Por ejemplo, las colonias de la bacteria *Bacillus subtilis*, dependiendo de la concentración de alimento y del sustrato en el que se realice el cultivo, pueden formar patrones espaciales con diferentes geometrías, entre los que se incluyen algunos con morfología ramificada y otros con estructura fractal (Figura 2).

### ● La quimiotaxis en la *Dictyostelium discoideum*

Hay organismos que emiten una sustancia química que es percibida por otros individuos de su misma

Los modelos matemáticos juegan un papel esencial, pues el sólo poseer la información genética “en bruto”, es decir, la estructura del código, no es suficiente para entender los mecanismos del desarrollo y de la evolución



Figura 1. El molusco *Amoria ellioti* (izquierda) y el molusco *Amoria ellioti* “simulado” (derecha).



Figura 2. Patrones espaciales de colonias de la bacteria *Bacillus subtilis*.

especie y que los atrae hacia el sitio en que se emite. Ésta es la base del proceso llamado *quimiotaxis*. La amiba *Dictyostelium discoideum* es particularmente interesante.

*Dictyostelium* es un moho que vive en suelos fangosos, y durante su ciclo de vida lleva a cabo una serie de procesos fundamentales como agregación, adhesión, migración, etcétera. El ciclo de vida de esta amiba se ilustra en la Figura 3.

En condiciones favorables, la espورا germinará y dará origen a una amiba. La escasez de nutrientes origina cambios, tanto en cada individuo como en el conglomerado. Si el alimento escasea, se inicia un proceso de agregación de estos organismos hacia sitios con características particulares. Inmediatamente después de la agregación, se forma una masa babosa compuesta de muchas células, que se dirige hacia lugares con más luz y humedad. Una vez que este movimiento cesa, a partir del cuerpo baboso se forma un tallo muy delgado coronado por una capucha, que contiene esporas. Si una de éstas se coloca en un medio favorable, germinará, repitiéndose el ciclo.

Durante mucho tiempo se conjeturó que la agregación de *Dictyostelium* se debía a la quimiotaxis, pero no se conocía la sustancia quimioatrayente. Hoy ha sido identificada: es el monofosfato de adenosina cíclico (cAMP). Algunas células pioneras liberan periódica-

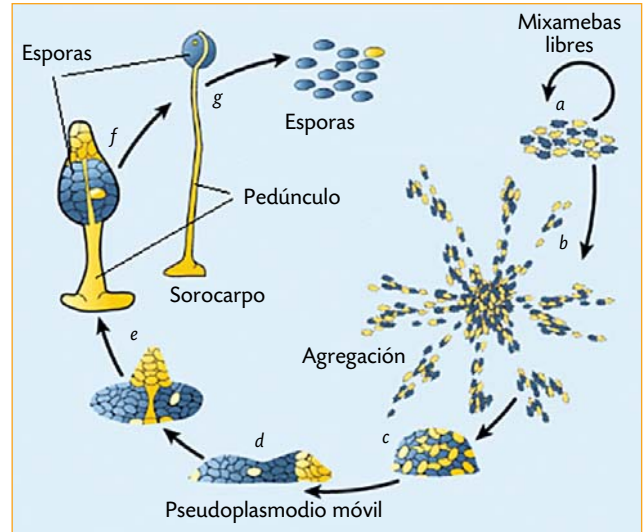


Figura 3. Ciclo de vida de la amiba *Dictyostelium discoideum*.

mente cAMP, que es detectado por las amibas cercanas. Éstas siguen la estela correspondiente hacia los lugares en los que se emite más cAMP. En respuesta al estímulo, la amiba se mueve cierto tiempo y después permanece quieta algunos minutos, para iniciar de nueva cuenta el movimiento. Así, ciclos repetidos de movimiento y pausa llevan a la amiba al sitio desde el que surge la mayor cantidad de cAMP. Se trata de verdaderas ondas de concentración de amibas, que viajan desde sitios alejados hacia el centro emisor del qui-

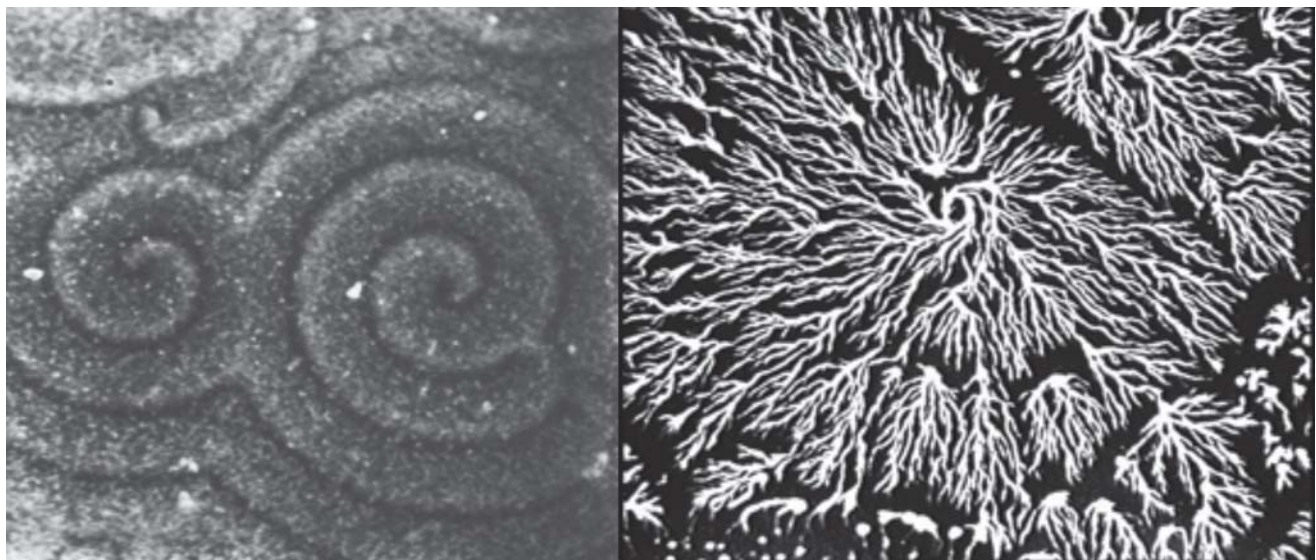


Figura 4. Patrones espaciales en el movimiento de colonias de las amibas *Dictyostelium discoideum*. De espirales que rotan a patrones ramificados.

mioatrayente. En la Figura 4 aparece una secuencia de formaciones espaciales de *Dictyostelium*.

### ● Patrones en organismos: serpientes

Las células precursoras del pigmento de las serpientes, *cromatoblastos*, migran de la cresta neural durante el desarrollo embrionario y se distribuyen en la dermis. Diversas interacciones pueden dar lugar tanto a células pigmentadas como a células no pigmentadas, produciendo franjas o motas. Murray y Myerscough propusieron que la concentración de cromatoblastos se regula debido a que éstos, además de producir la sustancia quimioatrayente, también responden a ella. Las simulaciones numéricas realizadas usando un sistema de reacción-difusión-quimiotaxis reprodujeron una gama de patrones que van desde bandas longitudinales, franjas transversales, rombos o motas, hasta otros más complejos que nos recuerdan a algunas serpientes de aspecto muy vistoso. Véase la Figura 5.

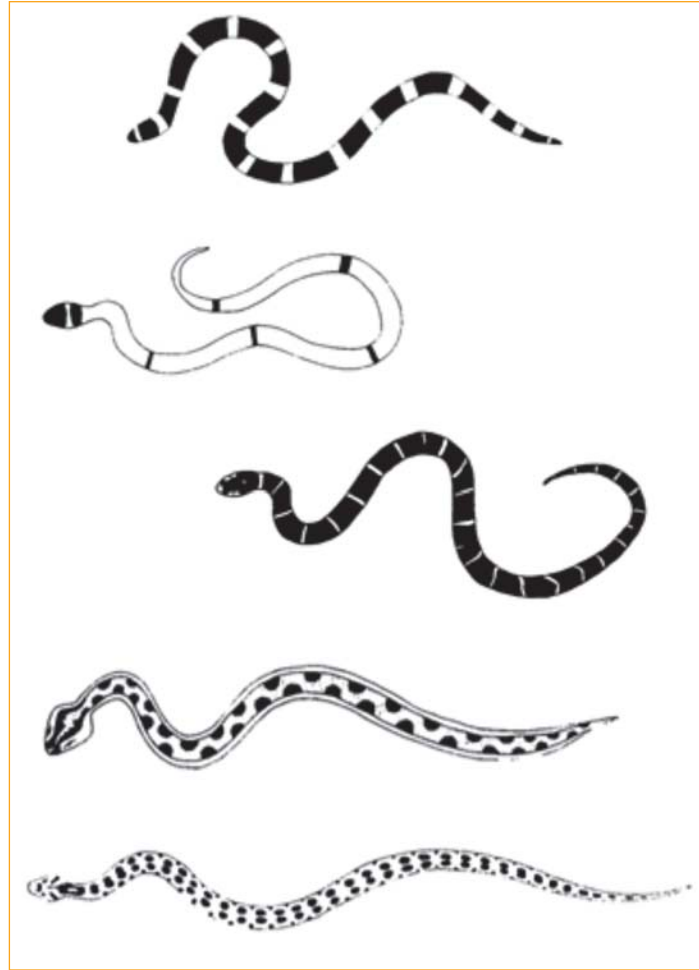
### ● Patrones de vegetación en zonas semiáridas

Pasemos ahora al nivel de los paisajes en la naturaleza. En éstos la vegetación no se distribuye en el espacio al azar, sino que forma patrones regulares. Un ejemplo son los bandeados que forman los macollos del pasto *Hilaria mutica*, en el desierto de Mapimí, Durango, en el norte de México.

En la última década se han usado ecuaciones de tipo reacción-difusión-advección para describir la interacción entre la masa de vegetación y el agua disponible (que proviene de la lluvia) que hace posible la emergencia de patrones de vegetación en zonas semiáridas.

### ● La filotaxia de Fibonacci

La palabra *filotaxia* viene de las raíces griegas *phyllos*, hoja, y *taxis*, orden, por lo que podríamos decir que significa “el orden de las hojas”. En un sentido más general, este concepto podría aplicarse al orden en el que aparecen los brotes (ramas, hojas, pétalos, etcétera) en las plantas.



**Figura 5.** Distintos patrones en serpientes, obtenidos mediante simulaciones numéricas realizadas por Murray y Myerscough.

Si uno observa la disposición que tienen las florecillas del girasol, se da cuenta de que forman arreglos cuya disposición espacial no es arbitraria: los surcos tienen la forma de espirales logarítmicas, y el número de estas curvas es grande. Unas abren a la izquierda, mientras que otras lo hacen a la derecha. Sin embargo, su número no es arbitrario: las que abren hacia la izquierda y las que lo hacen hacia la derecha son dos números consecutivos de la *sucesión de Fibonacci* clásica: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... Desde temprana edad, este problema atrajo la atención de Turing, y en la etapa final de su vida abonó de forma notable a su comprensión.

Para ello usó tanto su propio enfoque como otro que, de forma sorprendente, conjunta a la botánica con la cristalografía, y que fue introducida por los hermanos Bravais. Nos referimos a la teoría de las retículas.

### ● La filotaxia en cactáceas

La familia *Cactaceae* es originaria del Continente Americano, y agrupa a unas dos mil especies que viven en climas desérticos o semidesérticos. México es el país con mayor riqueza de estas plantas.

La morfología de su tallo es una de las características que distingue a una especie de otra. Por ejemplo, en algunos cactus su tallo tiene forma de columna (con o sin ramificaciones); otros, como las biznagas, tienen un tallo prácticamente esférico. En éste, las “costillas” de las biznagas también exhiben una orga-

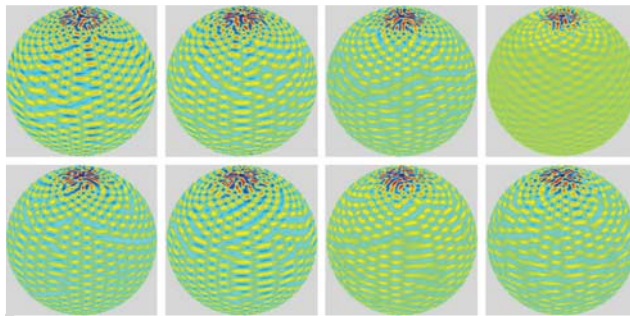


Figura 6. Patrones filotácticos a distintas tasas de crecimiento.



Figura 7. Comparación de la biznaga con su simulación.

nización espacial de tipo espiral, como la mencionada antes. Aquí es muy importante el factor crecimiento y el cambio en la curvatura de la superficie.

Aunque habría mucho más que decir, nos limitaremos a mencionar que aplicando las ideas de Turing en regiones que crecen y cambian su curvatura, se obtienen simulaciones como las que se ven en la Figura 6. En ellas se observa que a medida que la esfera (biznaga) crece, se van definiendo más nítidamente las formaciones en espiral. La Figura 7 muestra una comparación entre una biznaga “adulta” y su correspondiente simulación numérica.

### ● Conclusiones

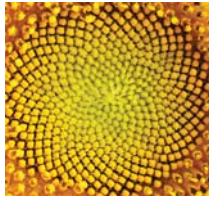
Hay mucho que decir sobre investigaciones actuales y futuras relacionadas con la propuesta de Turing. Por ejemplo, en ella las superficies sobre las que emergen los patrones son fijas; es decir, su geometría y tamaño no cambian al pasar el tiempo. Un ejemplo muy vistoso que se ha citado en la literatura reciente es un pez del género *Pomacanthus*. Algunas variedades de éste exhiben franjas dorso-ventrales sobre un fondo azul oscuro. A medida que el pez crece, se desarrollan nuevas franjas más angostas y, gradualmente, se van insertando entre las franjas preexistentes (véase Figura 8).

Terminamos este trabajo señalando que la modelación matemática en morfogénesis y en la emergencia de patrones en ciencias químico-biológicas es un campo de investigación activo, de actualidad y relevancia tanto desde el punto de vista matemático como de las ciencias que le dan origen.



Figura 8. Los patrones que exhibe el pez *Pomacanthus Imperator* cambian drásticamente a medida que envejece.

**Jorge Antonio Castillo Medina** estudió la licenciatura y maestría en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Guerrero. Actualmente estudia el doctorado en Ciencias Matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Es profesor de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Sus áreas de interés son la formación de patrones y bifurcaciones en sistemas biológicos.  
jcastillo7701@gmail.com



**Faustino Sánchez Garduño** estudió Física y Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ahí mismo realizó sus estudios de maestría en Ciencias (matemáticas). Su doctorado en Matemáticas lo obtuvo en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Oxford. Su área de interés son las ecuaciones diferenciales no lineales con diversas aplicaciones a la biología. Ha ejercido la docencia y realizado investigación en la Facultad de Ciencias de la UNAM, donde es profesor titular de tiempo completo y forma parte del Grupo de Biología Matemática.  
faustinos403@gmail.com



**Pablo Padilla Longoria** estudió Física y Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Posteriormente obtuvo la maestría y doctorado en Ciencias Matemáticas en el Instituto Courant de la Universidad de Nueva York. Es investigador del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. Sus áreas de interés incluyen las ecuaciones diferenciales y el análisis no lineal, especialmente en problemas relacionados con la biología, la física y la economía.  
pabpad@gmail.com

### Lecturas recomendadas

- Aldama, A., J. L. Gutiérrez, P. Miramontes y F. Sánchez Garduño (2010), "D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948)", *Ludus vitalis*, XVIII(34):3-34.
- Kondo, S. y T. Miura (2010), "Reaction-diffusion model as a framework for understanding biological pattern formation", *Science*, 329:1616-1620.
- Murray, J. D. (2003), *Mathematical biology II: spatial models and biomedical applications*, Springer Verlag.
- Stewart, I. (1998), *Life's other secret, the new mathematics of the living world*, Allen Lane, Pinguin Press.
- Turing, A. M. (1952), "The chemical basis of morphogenesis", *Phil. Roy. Soc. London B*, 237:37-72.