Raúl Rojas

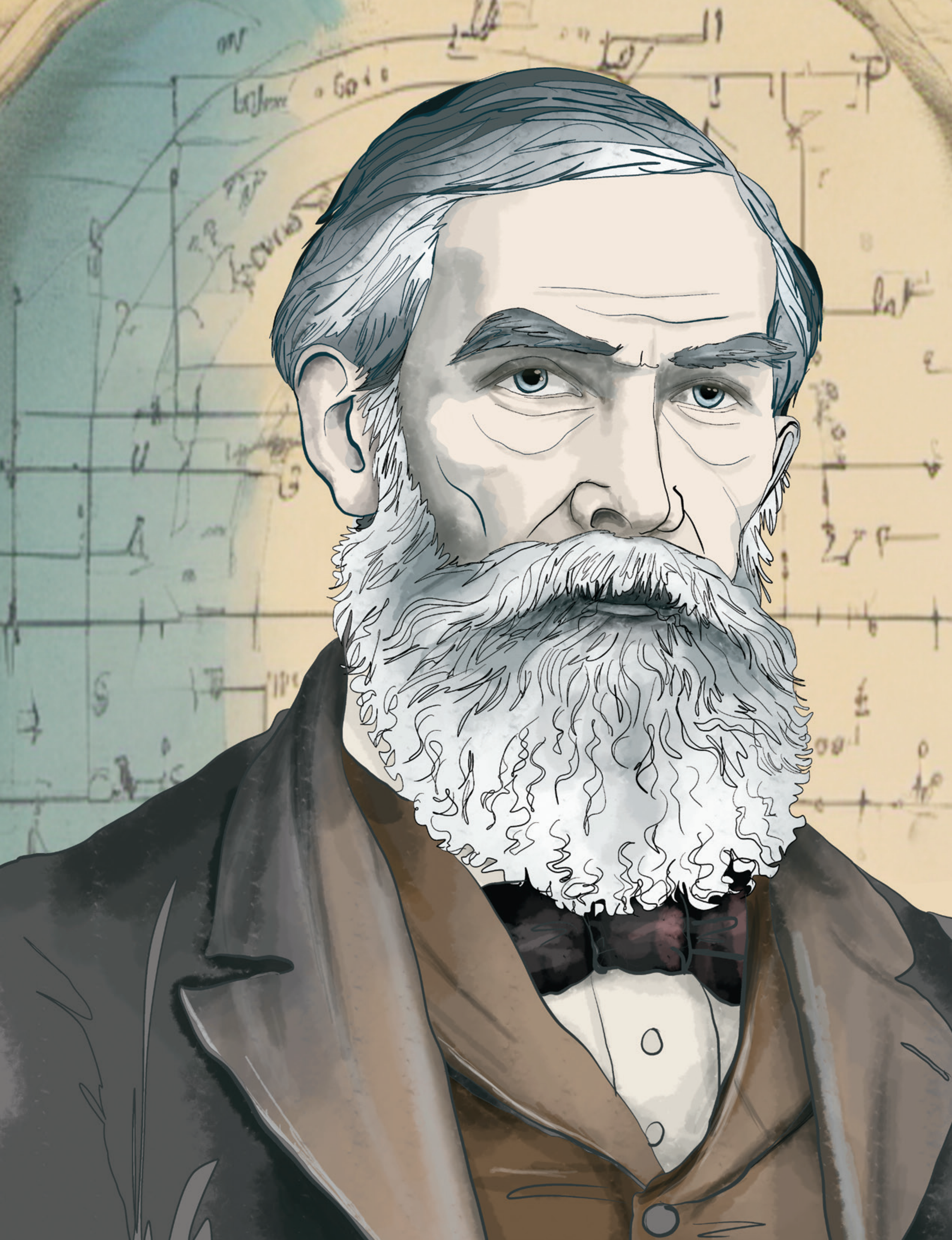
¿Qué son los números?

Este artículo explica diversos intentos que se han dado en las matemáticas para formalizar de manera precisa el concepto de "número". A pesar de que se trata de una noción intuitiva y milenaria, la axiomatización de los números ha recurrido a la teoría de conjuntos, la lógica y la teoría de funciones. En el texto explicamos las aproximaciones teóricas de Peano, Frege y Russell, así como de Alonzo Church.

El matemático alemán Richard Dedekind publicó en 1888 un ensayo con el enfático título "¿Qué es eso de los números?" (en mi traducción). Podría parecer que, tras milenios de existencia de las matemáticas, tan impertinente pregunta debería haberse resuelto siglos atrás. Sin embargo, no podemos soslayar que las matemáticas han progresado durante extensos periodos, a veces apelando a nuestra intuición, pero sin la capacidad de articular conceptos de manera verdaderamente rigurosa, sino hasta transcurridos muchos años. Fue el caso del cálculo diferencial e integral de Newton y Leibniz, que opera considerando magnitudes en el límite; es decir, cuando se aproximan a cero. A esas magnitudes "infinitamente pequeñas" se les llamó *diferenciales*, lo que en 1734 provocó una diatriba del obispo y filósofo Berkeley, quien tildó a las diferenciales de ser un concepto metafísico, "el espectro de cantidades que se han ido".

Pues bien, nada parece más intuitivo que los números. Se piensa que ya los neandertales y los primeros *Homo sapiens* llevaban un recuento de los días transcurridos o de los animales cazados haciendo incisiones en huesos que funcionaban como registros auxiliares. Un ejemplar paradigmático sería el "Hueso de Ishango", hallado en la República del Congo y datado en unos 20 000 años de antigüedad, el cual exhibe marcas paralelas que pueden interpretarse como representaciones numéricas (véase la **Figura 1**).

Además, no somos los únicos seres capaces de comparar magnitudes o conjuntos de objetos discretos. En experimentos con roedores se ha logrado adiestrarlos para que reciban una recompensa sólo si oprimen una palanca un número preciso de veces. En el caso de ciertas aves se les ha logrado entrenar para que reconozcan



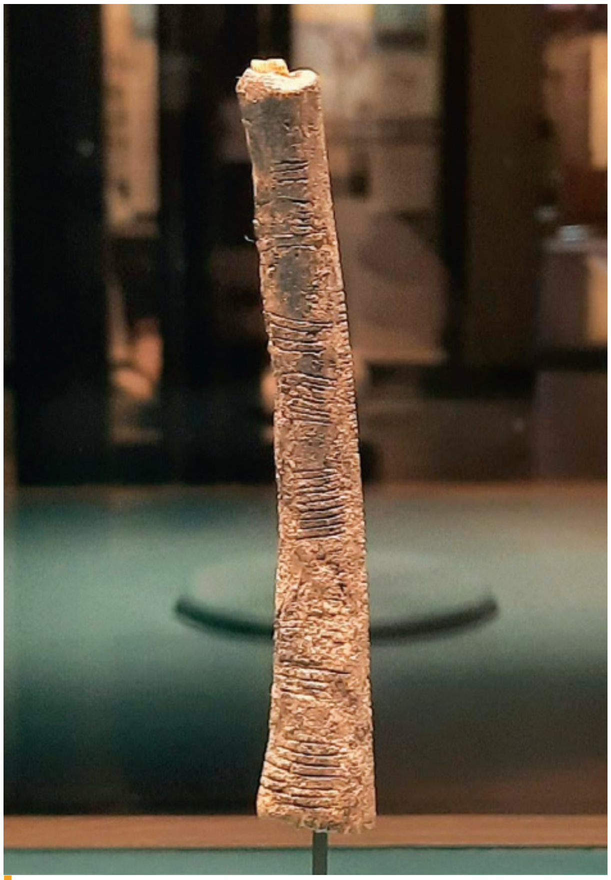


Figura 1. El hueso de Ishango es considerado un posible artefacto matemático que data del Paleolítico. Se exhibe en el Museo de Ciencias Naturales de Bélgica. Crédito: Joey Kentin.

hasta el número cinco. Más sorprendente es que las abejas son capaces de registrar cuando han sobrevolado un cierto número de marcas de colores que les indican dónde encontrar néctar. Los investigadores que descubrieron este fenómeno lo divulgaron bajo el sugestivo título "¿Pueden las abejas contar?".

Así que nuestro sentido de "numerosidad" parece ser innato y por eso la historia de los números es tan antigua. Ya desde la cultura babilónica se comenzó a trabajar con un sistema numérico posicional que facilitaba la suma, la multiplicación e incluso la división. Los matemáticos griegos fueron los primeros en estudiar los números de una manera más rigurosa, tratando de entender cómo es que se les puede descomponer en sus "partes", lo que ahora denominamos los factores de un número. Para la escuela de los pitagóricos el mundo estaría regido por los números enteros y las leyes naturales podrían explicarse como proporciones entre ellos; es decir, a través de "armonías numéricas".

Las matemáticas han sido llamadas la ciencia de los números, pero la cuestión persiste: ¿qué exactamente constituye un número? Como éste, hay muchos otros conceptos en las matemáticas que son intuitivos, pero cuando nos preguntan no son fáciles de precisar. Por ejemplo, Euclides definió un punto como aquello que "no tiene partes ni medida", y una línea como un objeto que únicamente posee longitud y carece de ancho. Estos enunciados apelan a la intuición geométrica del lector, pero carecen de utilidad para sustentar argumentos lógicos. En el caso de los números, todos sabemos que podemos ir asociando los dedos de la mano con los objetos en una mesa, contándolos. Sin embargo, ofrecer una definición rigurosa de los números se reveló como una tarea ardua, tan compleja que apenas en el siglo XIX surgieron sistemas axiomáticos que permitieron operar con ellos de manera teóricamente rigurosa.

Frege y Russell

El eminente matemático alemán Gottlob Frege (1848-1925) fue el primero en emprender la ambiciosa misión de reducir toda la matemática a las leyes de la lógica. Entre los enigmas que abordó, destacó la búsqueda de una definición que permitiese caracterizar de manera rigurosa los números enteros positivos, también conocidos como *números naturales* (incluyendo el cero), para deducir sus propiedades y definir sus operaciones de forma precisa. La definición de Frege fue posteriormente retomada por el destacado matemático británico Bertrand Russell, coautor de *Principia Mathematica*, el más audaz intento hasta ahora de formalizar los fundamentos de las matemáticas.

La propuesta de Frege y Russell radica en la idea de que si tengo dos conjuntos y puedo establecer una correspondencia uno a uno entre un elemento del primer conjunto y otro del segundo, sin repetición, entonces afirmamos que ambos conjuntos contienen la misma cantidad de elementos (Frege diría que son *equinumerosos*) (véase la **Figura 2**).

Ahora bien, hay muchos conjuntos de tres elementos. Podemos pensar en tres manzanas, tres

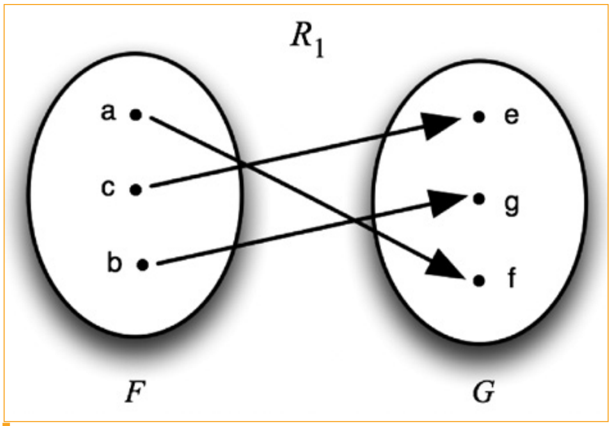


Figura 2. Representación del concepto de Frege de equinumerosidad de dos conjuntos. Tomado de "Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic", *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [en línea].

esferas, tres zapatos, etc., pero todos ellos son equivalentes porque siempre es posible establecer la correspondencia bidireccional entre sus tres elementos. El conjunto de todos esos conjuntos de tres elementos conforma lo que se llama su "clase de equivalencia". De particular interés para nuestros propósitos es la existencia de una clase de equivalencia para conjuntos con un elemento, otra para aquellos con dos elementos, y así sucesivamente. Asignamos nombres a estas clases: a la clase de equivalencia de todos los conjuntos con un elemento la llamamos "el uno", a la de conjuntos con dos elementos la denominamos "el dos", y así sucesivamente.

Eso es todo, para comenzar. Si alguien me pregunta qué es el número uno, le respondo: la clase de equivalencia de todos los conjuntos que son equivalentes al conjunto {a}, el que contiene una sola letra. El dos es la clase de equivalencia de todos los conjuntos que pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con el conjunto {a,b}, simplemente para dar un ejemplo de un conjunto con dos elementos. Y así sucesivamente.

A primera vista, esta definición que representa a los números como clases de equivalencia en las que hemos agrupado todos los conjuntos con igual número de elementos, podría parecer innecesariamente compleja; sin embargo, su gran virtud radica en la capacidad de trascender hacia las operaciones aritméticas. Al preguntarnos cuánto es 1 + 1, seleccionamos dos conjuntos distintos pertenecientes a la clase de equivalencia del uno y los combinamos. La unión de dos conjuntos ajenos, de un elemento, inevitablemente resulta en un conjunto con dos elementos. En este contexto, no existe conjunto de dos elementos que no pueda generarse mediante la unión de dos conjuntos ajenos de un elemento. En consecuencia, podemos afirmar que 1 + 1 es igual a 2. De manera análoga, cualquier otra suma de números se puede interpretar siguiendo este enfoque.

Si se prefiere evitar recurrir a conjuntos empíricos extraídos del mundo de las aplicaciones para representar conjuntos de cero, uno, dos o más elementos, es posible construir conjuntos de varios elementos de manera puramente lógica (como propuso John von Neumann). Para iniciar este proceso, se parte del conjunto vacío que posee cero elementos y se denota como $0 = \varnothing$. Un conjunto con un solo elemento podría ser el conjunto que incluye al conjunto vacío como único elemento, es decir, $1 = \{0\}$. De manera análoga, un conjunto de dos elementos sería $2 = \{0,1\}$, y así sucesivamente.

De esta forma, la definición de número se transforma en un problema de construcción lógica en el contexto de la teoría de conjuntos.

Los axiomas de Peano

El matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) planteó una axiomatización alternativa de los números naturales, similar a otra propuesta por Dedekind, aunque la formulación de Peano ganó mayor notoriedad con el tiempo.

Peano comienza por postular que existe un conjunto, el de los números naturales, cuyas propiedades quedan especificadas por cinco axiomas simples pero precisos. Imaginemos N –el conjunto de los naturales– como un cajón que va a contener a los naturales. Lo que tenemos que hacer es describir el contenido del cajón.

Comenzamos afirmando que *el símbolo 0 es un elemento en el cajón N* (Axioma 1). Así ya hemos identificado nuestro primer número. No es necesario definir de antemano qué es un número; de hecho, dejamos indefinido este concepto –práctica similar a la que hoy se emplea en geometría, donde se trabaja con puntos y líneas sin declarar previamente qué son exactamente.

Para seguir describiendo el cajón N, agregamos que *todo número está asociado a otro número llamado su sucesor* (Axioma 2). Por eso, el 1 está asociado al sucesor de 1, que podemos abreviar con el símbolo 2. El 2 tiene un sucesor que podemos abreviar con el símbolo 3, y así sucesivamente. De esta manera, se forma una secuencia numérica en constante expansión. Es importante destacar que los símbolos seleccionados para representar los números son arbitrarios; podrían ser alfa, beta y gamma en lugar de 1, 2 y 3. Lo crucial es que recordemos cuál número sigue a otro.

No obstante, buscamos evitar que la cadena de los números se cierre como un anillo (lo que sucedería si 0 fuera el sucesor de 4, por ejemplo). Asimismo, tampoco queremos que la cadena regrese a sí misma y forme un bucle, como sería el caso si 2 fuera el sucesor de 3 (dado que 3 es el sucesor de 2). Queremos evitar que la cadena de los números se "enrede".

Para impedir que se forme un anillo, establecemos entonces que *el 0 no es sucesor de ningún número* (Axioma 3). El cero es el punto de partida de toda la cadena y no tiene predecesores. Con el fin de evitar bucles, demandamos que *dos números distintos no puedan tener el mismo sucesor* (Axioma 4). Dado que 2 ya es el sucesor de 1, no puede ser también el sucesor de 3.

Con estos cuatro principios, en el cajón N tenemos una secuencia numérica infinita, ya que hemos establecido que cada número tiene un sucesor, y al no permitir su cierre en forma de anillo, ni la formación de bucles, la secuencia debe continuar indefinidamente.

Podría parecer que con estos pocos principios ya hemos incorporado en el cajón todos los enteros positivos y el cero. Pero puesto que es un cajón capaz de contener de todo, hay que poner en claro que únicamente esos enteros positivos y el cero deben estar adentro. Por ejemplo, podríamos imaginar que tenemos la cadena de los números 0, 1, 2, etc.; pero, aparte, un bucle a-b-c-a, que se cierra como anillo. Todos los axiomas se cumplirían: el 0 está en N, cada número tiene un sucesor, el 0 no es el sucesor de ningún otro número, y los sucesores son únicos.

Para evitar la inclusión de "basura" en forma de anillos –o incluso al final de los naturales–, necesitamos introducir un principio que llamamos *el principio de inducción* (Axioma 5). Éste postula que si una afirmación es válida para el cero, y si la validez de la afirmación se transmite de cualquier número a su sucesor, entonces la afirmación es válida para todos los números en el cajón N. En otras palabras: si comenzamos con el 0 y vamos pasando de cada número a su sucesor (al 1, al 2, al 3, etc.) debemos recorrer todos los números en el cajón sin que falte ninguno. La presencia de un anillo extra, como el a-b-c-a, no es posible si tenemos el principio de inducción, porque no hay manera de llegar a ese anillo comenzando con el 0 y siguiendo la cadena de sucesores.

Estos cinco principios son los llamados *axiomas de Peano*. Al concepto de número lo dejamos indefinido, inicialmente, y más bien procedemos a construir el conjunto de los números, postulando los cinco axiomas arriba mencionados. Los números naturales son lo que queda en el cajón N al aplicar los cinco axiomas.

Ésa es la forma en la que operan las matemáticas modernas: se trabaja con objetos que se omite definir al principio (se les llama "conceptos indefinidos"). Su definición estará dada por un proceso de construcción axiomática que establece las interrelaciones lógicas entre todas las estructuras que se van construyendo. Y así es como creamos los números: de la nada.

El cálculo lambda

Hay otras maneras de definir los números naturales. Una de ellas tiene que ver con la computación moderna y lo que se llama *transformaciones simbólicas*. Ya vimos arriba que la definición de los números se puede hacer partiendo de la teoría de conjuntos. Una alternativa es considerar a todos los objetos matemáticos como "funciones" aplicadas a otras funciones. El concepto de función es algo que aprendemos en la escuela media superior. Cuando escribimos $f(x) = x + 1$, lo que estamos haciendo es definir una función que le suma 1 a su argumento x. En el cálculo lambda decimos que una función f se aplica a su argumento y lo escribimos como $f(x)$.

En el cálculo lambda los números son funciones. Lo que hacen es tomar una función y su argumento y replicar la aplicación de la función un cierto número de veces, transformando la cadena inicial de símbolos. Por ejemplo, el 1 aplicado a $f\ a$ produce simplemente $f(a)$. Pero el 2 aplicado a $f\ a$, produce $f(f(a))$. Lo escribimos como $2(f\ a) \text{–>} f(f(a))$.

El cálculo lambda, desarrollado por Alonzo Church (1903-1995) en la Universidad de Princeton hace casi un siglo, tiene como objetivo la descripción de cualquier posible computación o transformación lógica de símbolos. Las propias matemáticas pueden concebirse como un proceso gradual de transformación de secuencias de símbolos, donde cada nuevo renglón de una demostración matemática es la transformación del renglón anterior. El cálculo lambda permite describir de manera rigurosa las transformaciones posibles en una computadora y demostrar, además, la imposibilidad de ciertas operaciones. Por ejemplo, no es factible escribir un programa de computadora que pueda analizar cualquier otro programa y determinar si finalizará o no. Tampoco es posible desarrollar un programa de computadora que pueda decidir si cualquier afirmación matemática posible es verdadera o no.

Conclusiones

Las tres maneras descritas de definir los números naturales no son las únicas que han encontrado los matemáticos. Una vez definidos los números naturales se pasa a definir las operaciones aritméticas y se procede a ensanchar el ámbito de los números; por ejemplo, introduciendo los números negativos. Ya con los números positivos y negativos tenemos todo el conjunto de los enteros. Con estos últimos definimos los llamados racionales, como 1/2 y 1/3, que son cocientes de enteros. Y con ayuda de los racionales y el concepto de límite, se pueden definir los números reales.

El lector puede concebir a los matemáticos como constructores de estructuras abstractas, cuyas interconexiones posibilitan aplicaciones en la vida real y, además, dan origen a nuevas teorías. Es semejante a jugar con bloques de construcción Lego: partimos de elementos muy simples para erigir gradualmente estructuras de gran complejidad y las piezas deben embonar de manera precisa, siguiendo las leyes de la lógica. Por eso, desde mi perspectiva, es plausible definir las matemáticas como "la ciencia de las estructuras abstractas". De ahí emana su belleza y su poder teórico, que permite a los matemáticos adentrarse en todas las ramas del conocimiento científico. Ya lo decía Galileo: el libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas.

Prof. Raúl Rojas
Departamento de Matemáticas y Computación.
Universidad Libre de Berlín
rrojasgonzalez@unr.edu

Referencias específicas

Frege, Gottlob (1879), *Begriffsschrift*, Halle, Lubrecht & Kramer.

Dedekind, Richard (1888), *Was sind uns was sollen die Zahlen?*, Brunswick, Vieweg.

Peano, Giuseppe (1889), *Arithmetices principia, nova methodo expósita*, Turín, Bocca.

Whitehead, Alfred North y Bertrand Russell (1925-1927), *Principia Mathematica*, Cambridge, Cambridge University Press.

Church, Alonzo (1941), *The Calculi of Lambda Conversion*, Londres, Princeton University Press.

Katz, Victor (1998), *A History of Mathematics: An Introduction*, Massachusetts, Addison-Wesley.